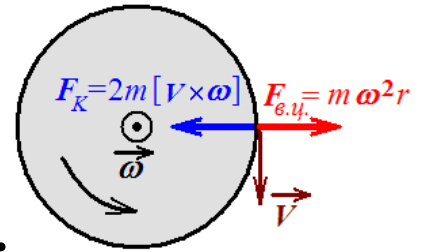




# Механіка

## Задачі семінарів для 1 курсу.

**Теми:** Динаміка обертального руху.  
Моменти інерції складних тіл.



### Задача 1

При обертанні колеса його кутове прискорення  $\beta$  змінювалось за законом  $\beta = A - B \cdot \omega$ , де  $A$  і  $B$  - константи. Чому дорівнюватиме кутова швидкість колеса через  $\tau$  секунд після деякого моменту часу, коли його кутова швидкість дорівнювала  $\omega_0$ ?

### Розв'язок

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}, \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = A - B \cdot \omega, \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{A - B \cdot \omega} = \int_0^{\tau} dt \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{B} \cdot \ln(A - B \cdot \omega) \Big|_{\omega_0}^{\omega} = \tau \Rightarrow \ln \frac{A - B \cdot \omega_0}{A - B \cdot \omega} = B \cdot \tau \Rightarrow$$

$$A - B \cdot \omega = (A - B \cdot \omega_0) \cdot e^{-B \cdot \tau} \Rightarrow A - B \cdot \omega = (A - B \cdot \omega_0) \cdot e^{-B \cdot \tau}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{A - (A - B \cdot \omega_0) \cdot e^{-B \cdot \tau}}{B}.$$

### Задача 2.

Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі так, що його кутова швидкість залежить від кута повороту  $\varphi$  за законом  $\omega = \omega_0 - \alpha \varphi$ , де  $\omega$  і  $\alpha$  - додатні константи. В момент часу  $t=0$  кут  $\varphi=0$ . Знайдіть залежність від часу: а) кута повороту; б) кутової швидкості.

## Розв'язок.

За означенням кутова швидкість обертання

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1)$$

і, тому, залежність кута повороту тіла  $\varphi$  визначиться з диференціального рівняння:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \alpha\varphi, \quad (2)$$

яке, з метою рознесення змінних інтегрування, перепишемо у вигляді:

$$\frac{d\varphi}{\omega_0 - \alpha\varphi} = dt \quad (3)$$

і далі проінтегруємо ліву і праву частини цього рівняння (ліву - по куту  $\varphi$  в межах від 0 до деякого довільного значення цього кута, тобто позначивши верхню межу просто як  $\varphi$ , а праву частину рівняння проінтегруємо по часу  $t$  в межах від 0 до  $t$  - відповідно деякого довільного значення часу), в результаті одержуємо:

$$-\frac{\ln(\omega_0 - \alpha\varphi)}{\alpha} = t + C, \text{ або } \varphi = \frac{\omega_0 - e^{-\alpha(t+C)}}{\alpha}, \quad (4)$$

де  $C$  - константа інтегрування. Оскільки при  $t = 0$  кут  $\varphi = 0$ , то

$$e^{-\alpha C} = \omega_0 \Rightarrow C = -\ln \omega_0 / \alpha, \quad (5)$$

і отже, шукана залежність кута повороту тіла  $\varphi$  від часу  $t$  матиме вигляд:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha t}). \quad (6)$$

Можна взяти також і визначений інтеграл від виразу (3):

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\omega_0 - \alpha\varphi} &= \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{\omega_0 - \alpha\varphi}{\omega_0} = -\alpha t \Rightarrow \frac{\omega_0 - \alpha\varphi}{\omega_0} = e^{-\alpha t} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi &= \frac{\omega_0}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha t}), \end{aligned}$$
 - і отримати той же самий вираз (6) для кута  $\varphi$ .

Залежність кутової швидкості  $\omega$  від часу  $t$  визначається диференціюванням останнього виразу:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

Відповідь: а)  $\varphi = \frac{\omega_0}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha t})$ ; б)  $\omega = \omega_0 \cdot e^{-\alpha t}$ .

---

### Задача 3

За який час тіло, що рухалось в координатній системі  $X, Y$  від початку координат зі швидкістю  $\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j}$ , де  $V_x=3$ ,  $V_y=10 \cdot t$  (в м/с), досягне точки з координатами, що співвідносяться як  $Y=5 \cdot X$ .

---

### Розв'язок

Радіус-вектор тіла в координатній системі  $X, Y$  визначиться інтегруванням відповідних координат вектора швидкості:  
 $\vec{r} = 3t \cdot \vec{i} + 5t^2 \cdot \vec{j}$ .

Координати вектора  $\vec{r}$ :  $X=3t$ ,  $Y=5t^2$ . Прирівнюючи ці координати у співвідношенні  $5t^2=5 \cdot 3t$ , знаходимо момент часу  $t$ , що задовольняє рівнянню співвідношення координат:  $t=3$  с.

---

### Задача 4 (1.39 Продов).

Точка рухається по дузі кола радіуса  $R$ . Її швидкість залежить від пройденого шляху  $s$  за законом  $V=A \cdot \sqrt{s}$ , де  $A$  - стала. Знайдіть кут між вектором повного прискорення  $\mathbf{a}$  і вектором швидкості  $V$  в залежності від  $s$ .

---

### Розв'язок.

Очевидно, що для того, щоб знайти прискорення, треба мати залежність швидкості від часу (щоб її можна було проінтегрувати). Тоді рівняння з умови можна записати як:

$$V = \frac{ds}{dt} = A \cdot \sqrt{s} \quad (1)$$

і далі, рознесши змінні  $s$  і  $t$  по різні боки рівняння:  $\frac{ds}{\sqrt{s}} = A \cdot dt$ , проінтегрувати його, записавши невизначений інтеграл, оскільки нас цікавить лише функціональна залежність  $s(t)$  при нульових початкових умовах:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{s}} = \int A \cdot dt,$$

звідки після інтегрування отримаємо (сталу інтегрування відкидаємо):

$$2 \cdot \sqrt{s} = A \cdot t. \quad (2a)$$

Звідси, маючи вже залежність  $s(t)$ :  $s = \frac{A^2 \cdot t^2}{4}, \quad (2б)$

можна визначити залежність  $V(t)$ , а далі і  $a(t)$ .

$V(t)$  простіше визначити підстановкою значення  $s$  з рівняння (2) в (1):

$$V = \frac{A^2 \cdot t}{2}, \quad (3)$$

хоч той самий результат можна було б отримати і з похідної  $s'(t)$  із виразу (2б).

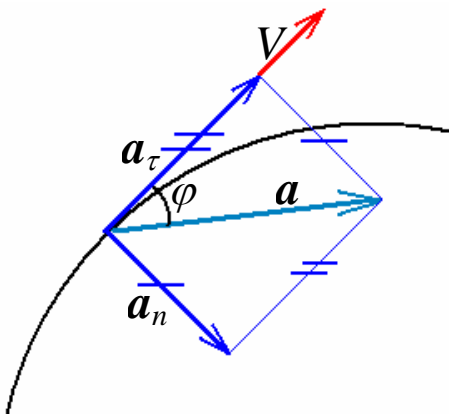
Далі визначаємо прискорення. Його тангенціальна складова, як відомо, є похідною по часу від тангенціальної (дотичної або лінійної) швидкості руху точки по колу:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{A^2}{2}, \quad (4)$$

а нормальна (тобто перпендикулярна або доцентрова) складова:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{A^4 \cdot t^2}{4 \cdot R}. \quad (5)$$

Маючи значення обох складових прискорення, можна визначити модуль повного прискорення, або одразу кут між вектором повного прискорення  $\mathbf{a}$  і тангенціальною його складовою  $\mathbf{a}_\tau$ , маючи на увазі, що тангенціальні складові лінійної швидкості  $V$  і прискорення  $\mathbf{a}_\tau$  паралельні, а довжина відрізка, що з'єднує кінці векторів  $\mathbf{a}$  та  $\mathbf{a}_\tau$  дорівнює  $\mathbf{a}_n$ :



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|a_n|}{|a_\tau|} = \frac{\frac{A^4 \cdot t^2}{4 \cdot R}}{\frac{A^2}{2}} = \frac{A^2 \cdot t^2}{2 \cdot R}. \quad (6)$$

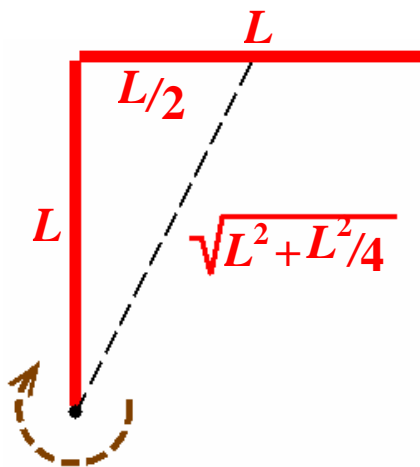
Таким чином, отримано залежність  $\varphi(t)$ . Для отримання залежності  $\varphi(s)$  достатньо підставити у вираз (6) залежність часу  $t$  від пройденого шляху  $s$  із співвідношення (2a):

$$t = \frac{2 \cdot \sqrt{s}}{A}; \quad \text{і після його підстановки}$$

отримати остаточну відповідь:  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{A^2 \cdot 4 \cdot s}{2 \cdot R \cdot A^2} = \frac{2s}{R}$ , або  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2s}{R}$ .

## ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ТІЛ

### Задача 1



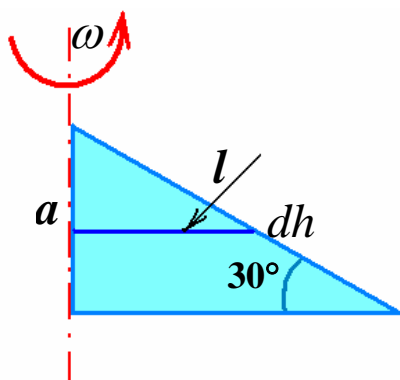
Визначіть момент інерції конструкції з двох однакових тонких стержнів довжинами 1 м і масами 1 кг кожний, скріплених кінцями під кутом  $90^\circ$ , відносно осі, що торкається кінця одного зі стержнів і перпендикулярна до площини, в якій ці стержні знаходяться.

### Розв'язок

Результуючий момент інерції визначиться як сума моментів двох стержнів (момент другого визначається за теоремою Штейнера):

$$J = J_1 + J_2 = mL^2/3 + [mL^2/12 + m \cdot (L^2 + L^2/4)] = \frac{5mL^2}{3}.$$

### Задача 2



Визначити момент інерції тонкого флюгера масою  $M$ , що представляє собою суцільний однорідний прямокутний трикутник, одна сторона (катет) якого розміром  $a$  є віссю обертання, а кут між двома іншими сторонами дорівнює  $30^\circ$  (рис.).

---

## Розв'язок

Момент інерції однієї елементарної тонкої смужки, перпендикулярної до осі:

$$dJ = dM \cdot \frac{l^2}{3};$$

Маса цієї смужки  $dM$ , віднесена до повної маси  $M$  трикутника (флюгера) -

$$\frac{dM}{M} = \frac{l \cdot dh \cdot 2}{a^2 \cdot \sqrt{3}}.$$

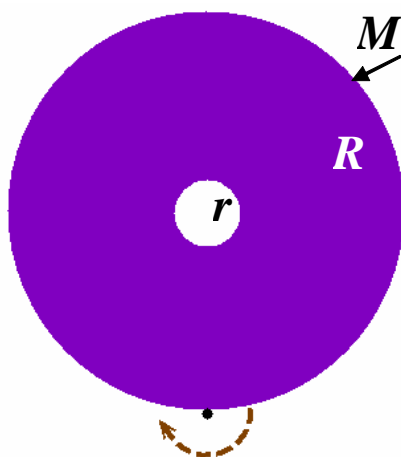
Зв'язок між довжиною вибраного відрізка  $l$  і висотою  $h$  (відстані від кута трикутника до початку вибраного відрізка) лінійний:  $l = \sqrt{3} \cdot h$ , оскільки нижня сторона (основа) трикутника дорівнює  $\sqrt{3} \cdot a$  (по теоремі Піфагора або як  $\text{tg}$  кута в  $30^\circ$ ); підставляємо  $l = \sqrt{3} \cdot h$  в рівняння для  $dM$  і зводимо вираз для елементарного моменту інерції до диф. рівняння з однією змінною  $h$  в правій його частині:  $dJ = M \frac{h^3 \cdot dh}{2 \cdot a^2}$ , і після інтегрування

правої частини по  $h$  від 0 до  $a$ :  $J = \frac{Ma^2}{2}$ .

---

## Задача 4а

Визначіть момент інерції міні CD-диска масою  $M = 7$  г, зовнішнім



діаметром  $2R = 8$  см та внутрішнім отвором діаметром  $2r = 1,5$  см відносно осі, що проходить через центр мас перпендикулярно до його площини.

---

## Розв'язок (початок)

$$J = \frac{M_0 R^2}{2} - \frac{m r^2}{2}; \text{ де } M_0 - \text{ маса суцільного}$$

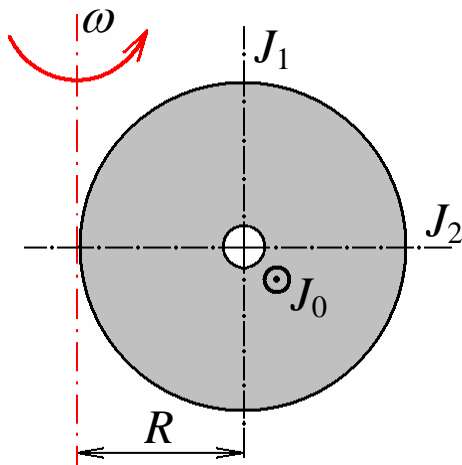
диска (немов би він не мав отвору);  $m$  – маса диска, що мав би розміри отвору.

$$M = M_0 - m; \quad M_0/m = R^2/r^2.$$

---

### Задача 46 (продовження попередньої)

Визначіть момент інерції суцільного однорідного тонкого круга (CD-диска) масою  $M_D = 15,7$  г із зовнішнім діаметром  $D = 120$  мм та отвором всередині (внутрішній діаметр отвору  $d = 15$  мм) відносно осі обертання, що лежить в площині диска, торкаючись його края (рис.).



#### Розв'язок

Як відомо, для плоскої фігури (всі 3 осі проходять через центр мас):  $J_1 + J_2 = J_0$ .

Оскільки  $J_1 = J_2 = J_0/2$ , а для суцільного диска  $J_0 = MR^2/2$ , то, відповідно

$$J_1 = J_2 = MR^2/4 = MD^2/16.$$

Визначити моменти інерції відносно осі обертання  $\omega$ , що торкається края (позначена червоним), можна за теоремою Штейнера окремо для суцільного диска –  $J_C$  (немов би він був суцільним) і внутрішнього (порожнини)  $J_{Bn}$ :

$$J_C = MR^2/4 + MR^2 = MD^2/16 + MD^2/4 = 5MD^2/16.$$

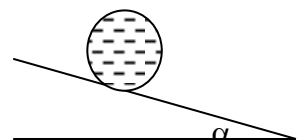
$$J_{Bn} = mr^2/4 + mR^2 = md^2/16 + mD^2/4 = m(d^2/16 + D^2/4).$$

Результуючий момент інерції визначиться як різниця цих двох моментів:

$J = J_C - J_{Bn}$ , а маси внутрішньої частини і суцільної зовнішньої можна визначити з рівнянь:  $m/M = d^2/D^2 = 1/64$ , та  $M - m = 15,7$  г, звідки  $m = 15,7/63 \approx 0,25$  г,  $M = 64m = 15,95$  г.

### Задачі для домашньої (самостійної) роботи

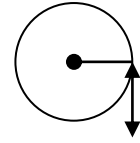
1. Визначіть прискорення, з яким циліндрична бочка масою  $M$  та радіусом  $R$ , що повністю заповнена рідиною з масою  $m$ , скочується без ковзання по похилій площині, яка утворює кут  $\alpha$  з горизонтом. Тертям між стінками та рідиною можна знехтувати.



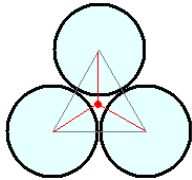
2. Людина стоїть на краю спочатку нерухомої платформи (горизонтальної каруселі), що може вільно (без тертя) обертатись та ловить рукою м'яч масою  $m$ , який летить зі швидкістю  $V$  горизонтально по дотичній до

платформи (каруселі) прямо в точку знаходження людини. Відстань від вертикальної осі обертання платформи до траєкторії м'яча -  $L$ .

Сумарний момент інерції людини та платформи  $I$ . Знайдіть кутову швидкість обертання платформи  $\omega$ , якої вона набуде після того, як людина схопить м'яч.



3. Визначіть момент інерції фігури, утвореної трьома дисками (кожен масою  $m=0,1$  кг і радіусом  $r=0,1 \cdot N$  метрів,  $N$  - ваш порядковий номер у списку груп ЕІТМ та ЕФ), розташованими в одній площині торкаючись краями, відносно перпендикулярної до площин дисків осі, яка проходить через центр симетрії фігури (червона точка), утвореної дисками.



4. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю  $V$ , пропорційною пройденому шляху  $S$ :  $V=0,1 \cdot N \cdot S$ . В деякий відрахунковий момент часу  $t_0=0$  його швидкість була  $V_0=0,1 \cdot N$  (розмірність усіх величин в системі СІ!). З якою швидкістю рухатиметься це тіло через час  $\Delta t=(4-0,1 \cdot N)$  секунд після початку відрахунку часу?

**Прим.** Фото розв'язаних задач у форматі jpg (або pdf), як і у попередніх завданнях, прохання надсилати на електронну пошту:

[svpgmc8@gmail.com](mailto:svpgmc8@gmail.com) до наступного семінара у Понеділок 30.10.2023.